Оптимальная горизонтальная соединимость на канонической группе Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta_1,\beta_2}$

НГУ

Жуков Р.И.

Введение

Интересующая нас каноническая группа Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta_1,\beta_2}$ определена в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ с системой координат (x, y, t, z, q), индуцированной координатным репером $(O, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, при помощи таблицы коммутаторов:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \alpha e_3, & \alpha \neq 0, \\ [e_1, e_3] = \beta_1 e_4, & \beta_1 \neq 0; \\ [e_2, e_3] = \beta_2 e_5, & \beta_2 \neq 0; \end{cases}$$

Без ограничения общности можем считать, что $\alpha > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$. Все прочие коммутаторы равны 0.

Введение

При помощи формулы Кэмпбелла-Хаусдорфа получим аналитическую запись операции левого сдвига произвольного элемента $\omega' = (x', y', t', z', q') \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta_1,\beta_2}$ на произвольный элемент $\omega = (x, y, t, z, q) \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta_1,\beta_2}$:

$$L_\omega \omega' = \omega \cdot \omega' = \Big(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y),$$
$$z + z' + \frac{\beta_1}{2}(xt' - x't) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - x')(xy' - x'y)$$
$$q + q' + \frac{\beta_2}{2}(xt' - x't) + \frac{\alpha\beta_2}{12}(x - x')(xy' - x'y) \Big).$$

Из этого получаем выражения для базисных левоинвариантных векторных полей в любой точке (x, y, t, z, q) :

$$X = (1, 0, -\frac{\alpha}{2}y, -\frac{\beta_1}{2}t - \frac{\alpha\beta_1}{12}xy, -\frac{\alpha\beta_2}{12}y^2),$$
$$Y = (0, 1, \frac{\alpha}{2}x, \frac{\alpha\beta_1}{12}x^2, -\frac{\beta_2}{2}t + \frac{\alpha\beta_2}{12}xy),$$
$$T = (0, 0, 1, \frac{\beta_1}{2}x, \frac{\beta_2}{2}y), \quad Z = e_4, \quad Q = e_5.$$

Введение

$\mathbb{E}_{\alpha,\beta_1,\beta_2}$ является 3-ступенчатой канонической группой Карно. r-ступенчатой алгеброй Карно называется градуированная алгебра Ли, обладающая стратификацией, то есть разлагающаяся в прямую сумму $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$ и $[V_i, V_j] \subset V_{i+k}$, если $i + k \leq$, $[Vi, Vk] = 0$ иначе и, в то же время $V_{i+1} = [V_1, V_i]$ и $[V_1, V_r] = 0$. Группа Ли, соответствующая r-ступенчатой алгебре Карно, называется r-ступенчатой группой Карно.

Подпространство V_1 r-ступенчатой алгебры Карно называется горизонтальным, а векторные поля, его образующие - горизонтальными векторными полями. Горизонтальные ломаные - ломаные, состоящие из отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей.

Предыдущие работы

Из теоремы Рашевского-Чоу следует, что любые две точки u, v канонической группы Карно $\mathbb{G}$ могут быть соединены горизонтальной ломаной, состоящей не более чем из $k_{u,\mathbb{G}}(v)$ горизонтальных отрезков. Здесь

$$k_{u,\mathbb{G}}(v) \leq dim V_1 + \sum_{i=2}^{r} (3 * 2^{i-1} - 2) \cdot dim V_i.$$

Есть более тонкая оценка из книги (Agrachev, Barilari, Boscain, 2020):

$$k_{u,\mathbb{G}}(v) \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{r} dim V_i$$

Результат

В нашем частном случае:

$$V_1 = Span(X, Y), V_2 = Span(T), V_3 = Span(Z, Q)$$

Интегральные линии горизонтальных векторных полей описываются следующим образом:

$$\dot{\gamma}(s) = \alpha(s)X(\gamma(s)) + \beta(s)Y(\gamma(s)) \quad \dot{\forall} s \in [0, s_0]$$

Общие методы дают верхние оценки 26 и 10, соответственно.
Нам удалось получить верхнюю оценку 5 при оценке снизу, равной 4.

Результат

Рассмотрели несколько случаев отдельно:

1. Любая точка $M = (0, 0, m_3, m_4, m_5)$, $m_3(m_4^2 + m_5^2) \neq 0$ соединима с началом координат горизонтальной 3-ломаной.

2. Любая точка $M = (m_1, m_2, m_3, 0, 0)$, $(m_1^2 + m_2^2)m_3 \neq 0$ соединима с началом координат горизонтальной 4-ломаной.

3. Любая точка $M = (0, 0, 0, m_4, m_5)$, $m_4^2 + m_5^2 \neq 0$ соединима с началом координат горизонтальной 4-ломаной.

4. Любая точка $M = (0, 0, m_3, 0, 0)$ соединима с началом координат горизонтальной 4-ломаной.

5. Любая точка $M = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$, $(m_1^2 + m_2^2)m_3(m_4^2 + m_5^2) \neq 0$ соединима с началом координат горизонтальной 5-ломаной.

Конец

Спасибо за внимание!