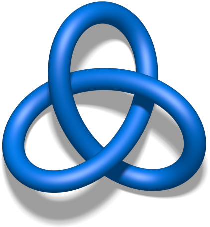
# Идемпотенты в квандловых кольцах. Представления группы плоских виртуальных кос

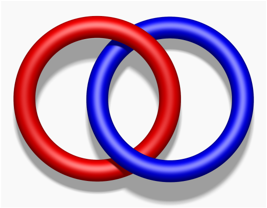
13 декабря 2020 г.

# Узлы и зацепления

## Определение

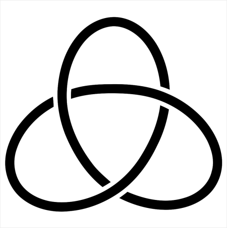
Зацеплением называется вложенное в $\mathbb{R}^3$ объединение попарно не пересекающихся окружностей. Узлом называется зацепление, имеющее одну компоненту связности, т.е. узел является вложением окружности в $\mathbb{R}^3$.

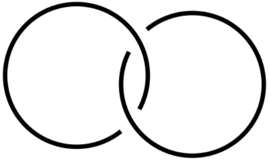


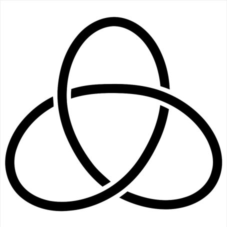


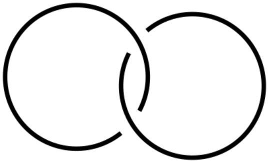
## Определение

Диаграммой зацепления называется регулярная проекция зацепления на плоскость $\mathbb{R}^2$.

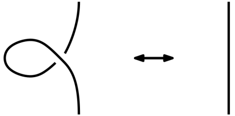




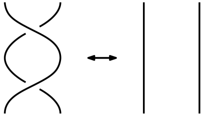




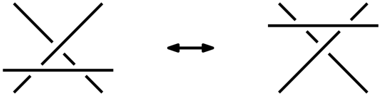
## Движения Рейдемейстера:



I движение



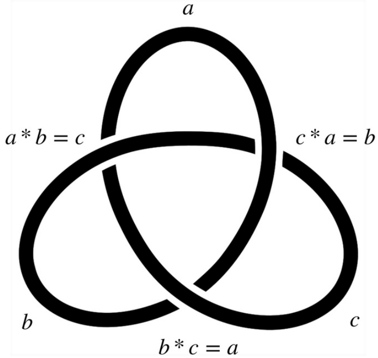
II движение



III движение

# Квандлы

Квандл – это алгебраическая система с одной бинарной операцией, удовлетворяющей трём аксиомам. Эти аксиомы кодируют три движения Рейдемейстера на диаграмме зацепления. Квандлы впервые были введены М.Такасаки в 1943 году, однако их изучение набрало обороты только после фундаментальных работ Джойса и Матвеева.



### Определение

*Квандл* – это алгебраическая система $(Q, *)$ с одной бинарной операцией $(x, y) \mapsto x * y$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

$(Q1)$ $x * x = x$ для любого $x \in Q$,
$(Q2)$ для любых $x, y \in Q$ существует единственный $z \in Q$, такой что $x = z * y$,
$(Q3)$ $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ для любых $x, y, z \in Q$.

## Определение

*Квандл* – это алгебраическая система $(Q, *)$ с одной бинарной операцией $(x, y) \mapsto x * y$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

$(Q1)$ $x * x = x$ для любого $x \in Q$,
$(Q2)$ для любых $x, y \in Q$ существует единственный $z \in Q$, такой что $x = z * y$,
$(Q3)$ $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ для любых $x, y, z \in Q$.

**Примеры:**

- Если $G$ – группа, то множество $G$ с бинарной операцией $x * y = y^{-1}xy$ является квандлом $Conj(G)$, называемым *квандлом сопряжения* группы $G$.
- Если $G$ – группа, то множество $G$ с бинарной операцией $x * y = yx^{-1}y$ является квандлом $Core(G)$, называемым *основным квандлом* группы $G$.

## Определение

Если $Q$ – квандл, $R$ – кольцо, то квандловым кольцом называется множество

$$R[Q] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in R, x_i \in Q \right\}.$$

## Определение

Если $Q$ – квандл, $R$ – кольцо, то квандловым кольцом называется множество

$$R[Q] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in R, x_i \in Q \right\}.$$

Умножение в кольце $R[Q]$ :

$$\left( \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{m} \beta_i y_i \right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha_i \beta_j (x_i * y_j).$$

## Определение

Ненулевой элемент $u \in R[Q]$ называется *идемпотентом*, если $u = u^2$. Множество всех идемпотентов кольца $R[Q]$ обозначается $I(R[Q])$.

Если $R$ содержит единицу $1$, то элемент $1x$, $x \in Q$, очевидно, является идемпотентом.

**Определение**

Ненулевой элемент $u \in R[Q]$ называется *идемпотентом*, если $u = u^2$. Множество всех идемпотентов кольца $R[Q]$ обозначается $I(R[Q])$.

Если $R$ содержит единицу $1$, то элемент $1x$, $x \in Q$, очевидно, является идемпотентом.
Такие идемпотенты называются *тривиальными*. Нахождение множества нетривиальных идемпотентов заданного квандлового кольца является важной проблемой, так как это первый шаг к описанию группы автоморфизмов этого кольца.

# Идемпотенты в кольце $R[Core(G)]$

Группа $G$ называется *упорядочиваемой*, если на ней задан линейный порядок $<$, и для любых $x, y, z \in G$ из неравенства $x < y$ следуют неравенства $zx < zy$ и $xz < yz$.

**Теорема 1**

*Если $R$ – кольцо с единицей, без делителей нуля, $G$ – упорядочиваемая группа, то квандловое кольцо $R[Core(G)]$ имеет только тривиальные идемпотенты.*

**Теорема 2**

*Если $R$ – кольцо без делителей нуля, $G$ – упорядочиваемая группа, то квандловое кольцо $R[Core(G)]$ не содержит делителей нуля.*

Если $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, то $Core(G)$ называется *диэдральным квандлом* порядка $n$ и обозначают как $R_n$. Если обозначить $R_n = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, то умножение примет вид

$$a_i * a_j = a_{2j-i \ (mod\ n)}.$$

Если $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, то $Core(G)$ называется *диэдральным квандлом* порядка $n$ и обозначают как $R_n$. Если обозначить $R_n = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, то умножение примет вид

$$a_i * a_j = a_{2j-i \ (mod\ n)}.$$

Известные результаты:

$$I(R[R_2]) = \{ta_0 + (1-t)a_1\}$$
$$I(R[R_3]) = \{a_0, a_1, a_2\}$$
$$I(R[R_4]) = \{ta_0 + (1-t)a_2, ta_1 + (1-t)a_3\}$$

Заметим, что отображение $S_x : Q \to Q$, определяемое как

$$S_x(y) = y * x,$$

является автоморфизмом на $Q$ для любого $x$. Такие автоморфизмы называются *внутренними автоморфизмами* квандла $Q$.

**Определение**

Квандл $Q$ называется *связным*, если группа внутренних автоморфизмов действует на $Q$ транзитивно.

Диэдральный квандл $R_n$ является связным, только если $n$ – нечётно.

### Предложение

*Если* $n = pq,\ \ p, q \in \mathbb{N}$, *то*

$$R_n = \bigsqcup_{i=1}^{p} X_i, \quad X_i \simeq R_q.$$

При этом такое разбиение единственно в следующем смысле.
*Если* $X_1 \subseteq R_n$ *- подквандл,* $|X_1| = q$, *то* $n = pq$ *для некоторого* $p$, *а также существуют* $X_2, \ldots, X_p \subseteq R_n$, *такие что*

$$R_n = \bigsqcup_{i=1}^{p} X_i, \quad X_i \simeq R_q.$$

## Следствие

*Если $n = 2m$, то $R[R_n]$ содержит нетривиальные идемпотенты.*

## Предложение

*Квандловое кольцо $R[R_n]$ при $n > 1$ содержит делители нуля.*

**Следствие**

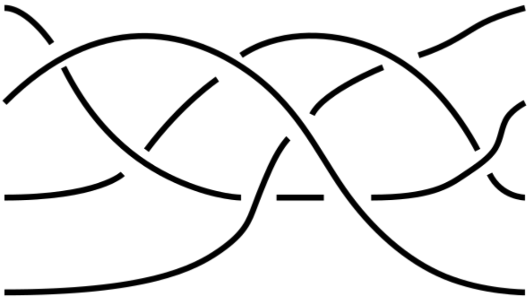
*Если $n = 2m$, то $R[R_n]$ содержит нетривиальные идемпотенты.*

**Предложение**

*Квандловое кольцо $R[R_n]$ при $n > 1$ содержит делители нуля.*

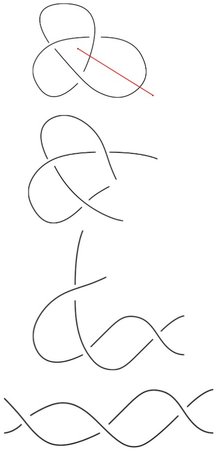
$$X_i = \{a_i, a_{i+p \pmod n}, a_{i+2p \pmod n}, \dots, a_{i+(q-1)p \pmod n}\}.$$

# Косы



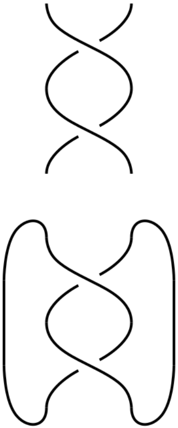
**Теорема (Александер, 1923)**

Всякое зацепление изотопно замыканию некоторой косы.



**Теорема (Александер, 1923)**

Всякое зацепление изотопно замыканию некоторой косы.

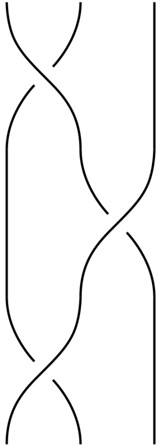


### Определение

Группой кос на $n \geqslant 2$ нитях $B_n$ называется группа с порождающими $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ и следующими соотношениями:

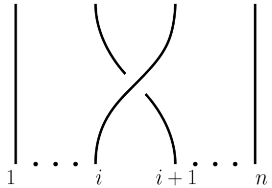
$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \qquad |i-j| \geqslant 2$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2$$

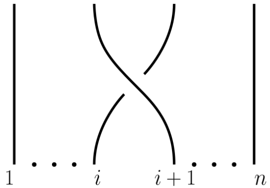


$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \qquad |i-j| \geqslant 2$$

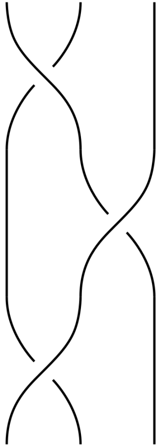
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2$$




$\sigma_i$

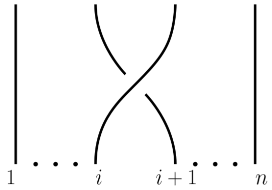



$\sigma_i^{-1}$

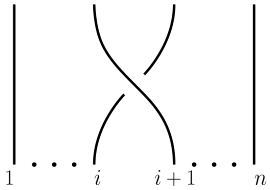


$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \qquad |i-j| \geqslant 2$$

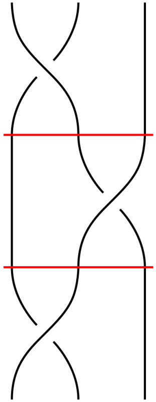
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2$$




$\sigma_i$




$\sigma_i^{-1}$



$\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$

### Определение

Группой плоских кос на $n \geqslant 2$ нитях $FB_n$ называется группа кос с порождающими $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ и дополнительным соотношением:

$$\sigma_i^2 = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

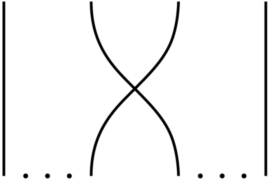
### Определение

Группой виртуальных кос на $n \geqslant 2$ нитях $VB_n$ называется группа кос с дополнительными порождающими $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ и дополнительными соотношениями:

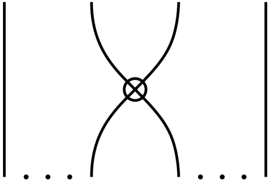
$$\begin{aligned}
\rho_i^2 &= 1 && i = 1, 2, \ldots, n-1\\
\rho_i\rho_j &= \rho_j\rho_i && |i-j| \geqslant 2\\
\rho_i\rho_{i+1}\rho_i &= \rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1} && i = 1, 2, \ldots, n-2\\
\rho_i\sigma_j &= \sigma_j\rho_i && |i-j| \geqslant 2\\
\rho_i\rho_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\rho_i\rho_{i+1} && i = 1, 2, \ldots, n-2
\end{aligned}$$

$$\sigma_i^2 = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\begin{aligned}
\rho_i^2 &= 1 & i &= 1, 2, \ldots, n-1 \\
\rho_i \rho_j &= \rho_j \rho_i & |i-j| &\geqslant 2 \\
\rho_i \rho_{i+1} \rho_i &= \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} & i &= 1, 2, \ldots, n-2 \\
\rho_i \sigma_j &= \sigma_j \rho_i & |i-j| &\geqslant 2 \\
\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} & i &= 1, 2, \ldots, n-2
\end{aligned}$$



$\sigma_i$



$\rho_i$

## Определение

Группой плоских виртуальных кос на $n \geqslant 2$ нитях $FVB_n$ называется группа с порождающими $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ и соотношениями:

$$
\begin{array}{rlrl}
\sigma_i^2 = 1 & i = 1, 2, \ldots, n-1 & \rho_i^2 = 1 & i = 1, 2, \ldots, n-1 \\
\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i-j| \geqslant 2 & \rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i & |i-j| \geqslant 2 \\
\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & i = 1, 2, \ldots, n-2 & \rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} & i = 1, 2, \ldots, n-2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\rho_i \sigma_j = \sigma_j \rho_i & |i-j| \geqslant 2 \\
\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} & i = 1, 2, \ldots, n-2
\end{array}
$$

### Определение

Группой плоских виртуальных кос на $n \geqslant 2$ нитях $FVB_n$ называется группа с порождающими $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ и соотношениями:

$$\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= 1 & i &= 1, 2, \dots, n-1 & \rho_i^2 &= 1 & i &= 1, 2, \dots, n-1\\
\sigma_i\sigma_j &= \sigma_j\sigma_i & |i-j| &\geqslant 2 & \rho_i\rho_j &= \rho_j\rho_i & |i-j| &\geqslant 2\\
\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & i &= 1, 2, \dots, n-2 & \rho_i\rho_{i+1}\rho_i &= \rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1} & i &= 1, 2, \dots, n-2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_i\sigma_j &= \sigma_j\rho_i & |i-j| &\geqslant 2\\
\rho_i\rho_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\rho_i\rho_{i+1} & i &= 1, 2, \dots, n-2
\end{aligned}$$

## Определение

Группой плоских виртуальных кос на $n \geqslant 2$ нитях $FVB_n$ называется группа с порождающими $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ и соотношениями:

$$
\begin{array}{rlrl}
\sigma_i^2 = 1 & i = 1, 2, \ldots, n-1 & \rho_i^2 = 1 & i = 1, 2, \ldots, n-1 \\
\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & |i-j| \geqslant 2 & \rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i & |i-j| \geqslant 2 \\
\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & i = 1, 2, \ldots, n-2 & \rho_i\rho_{i+1}\rho_i = \rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1} & i = 1, 2, \ldots, n-2
\end{array}
$$

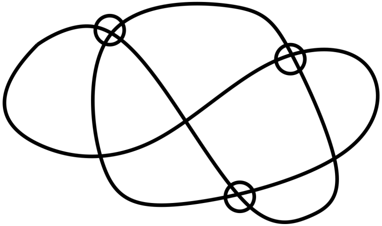
$$
\begin{array}{rl}
\rho_i\sigma_j = \sigma_j\rho_i & |i-j| \geqslant 2 \\
\rho_i\rho_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\rho_i\rho_{i+1} & i = 1, 2, \ldots, n-2
\end{array}
$$

## Определение

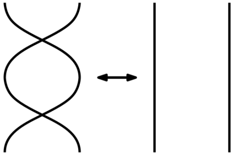
Группой плоских виртуальных кос на $n \geqslant 2$ нитях $FVB_n$ называется группа с порождающими $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ и соотношениями:

$$\begin{array}{rlrl} \sigma_i^2 = 1 & i = 1, 2, \dots, n-1 & \rho_i^2 = 1 & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i-j| \geqslant 2 & \rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i & |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & i = 1, 2, \dots, n-2 & \rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} & i = 1, 2, \dots, n-2 \end{array}$$

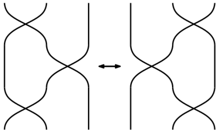
$$\begin{array}{rl} \rho_i \sigma_j = \sigma_j \rho_i & |i-j| \geqslant 2 \\ \rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} & i = 1, 2, \dots, n-2 \end{array}$$



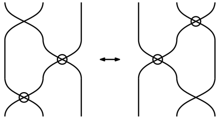
Плоский виртуальный узел



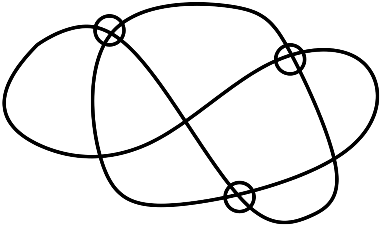
$$\sigma_i^2 = 1$$



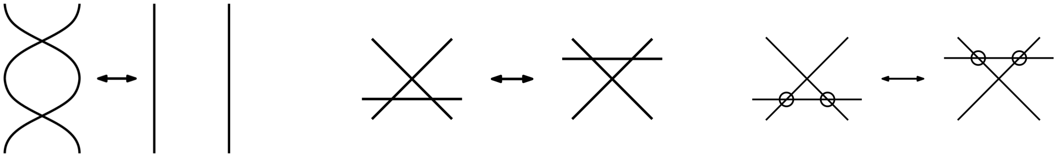
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$



$$\rho_i\rho_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}$$



Плоский виртуальный узел



Движение II' Движение III' Движение IV

**Утверждение**

В группе $FVB_n$ не выполняется соотношение

$$\rho_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1}.$$

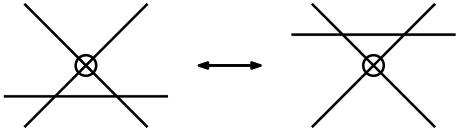
Это соотношение называется *запрещённым*.

### Утверждение

В группе $FVB_n$ не выполняется соотношение

$$\rho_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1}.$$

Это соотношение называется *запрещённым*.



### Определение

Представлением группы $G_1$ называется гомоморфизм $\varphi : G_1 \to G_2$ для некоторой группы $G_2$.

Представление Артина $\varphi_A : B_n \to Aut(F_n)$:

$$\varphi_A(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\ x_{i+1} \mapsto x_i \end{cases}$$

Представление Артина является точным $(Ker\varphi_A = 1)$.

### Определение

Представлением группы $G_1$ называется гомоморфизм $\varphi : G_1 \to G_2$ для некоторой группы $G_2$.

Представление Бурау $\phi : B_n \to GL_n\left(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]\right)$:

$$\phi(\sigma_i) = I^{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \oplus I^{n-i-1}.$$

Представление Бурау является точным при $n = 2, 3$ и имеет нетривиальное ядро при $n > 4$.

Представление $\theta : FVB_n \to Aut(F_{2n})$:

$$\theta(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}y_{i+1} \\ x_{i+1} \mapsto x_i y_{i+1}^{-1} \end{cases} \qquad \theta(\rho_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} \\ x_{i+1} \mapsto x_i \\ y_i \mapsto y_{i+1} \\ y_{i+1} \mapsto y_i \end{cases}$$

### Теорема

Отображение $\theta : FVB_n \to Aut(F_{2n})$ является представлением.

**Предложение**

Представление $\theta$ не сохраняет запрещённое соотношение.

**Предложение**

Представление $\theta$ является точным при $n = 2$ и не является точным при $n \geqslant 3$.

Элемент в ядре: $(\rho_i \sigma_{i+1})^6$.

Определим отображения $\psi_1 : FVB_n \to S_n$, $\psi_2 : FVB_n \to S_n$:

$$\psi_1(\sigma_i) = (i, i+1), \qquad \psi_2(\sigma_i) = 1,$$
$$\psi_1(\rho) = (i, i+1), \qquad \psi_2(\rho_i) = (i, i+1).$$

Группа $FVP_n = Ker\ \psi_1$ называется *группой крашеных кос*.
Группа $FH_n = Ker\ \psi_2$ называется *виртуальной группой Рабенды*.

Определим отображения $\psi_1 : FVB_n \to S_n$, $\psi_2 : FVB_n \to S_n$:

$$\psi_1(\sigma_i) = (i, i+1), \qquad \psi_2(\sigma_i) = 1,$$
$$\psi_1(\rho) = (i, i+1), \qquad \psi_2(\rho_i) = (i, i+1).$$

Группа $FVP_n = Ker\ \psi_1$ называется *группой крашеных кос*.
Группа $FH_n = Ker\ \psi_2$ называется *виртуальной группой Рабенды*.

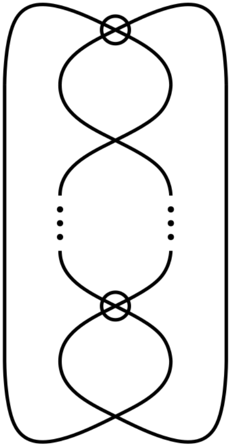
Обозначим $N$ – нормальное замыкание подгруппы

$$\langle (\rho_i \sigma_{i+1})^6 | i = 1, \ldots, n-2 \rangle.$$

## Предложение

$N \leq Ker\theta \leq FVP_n \cap FH_n$.

Представление $\theta$ позволяет строить инварианты плоских виртуальных зацеплений.
Инвариант представляет собой группу $G(\beta), \beta \in FVB_n$, заданную порождающими и соотношениями.



Спасибо за внимание!