Приложения теоремы об общем положении для множеств дробной размерности

Камалутдинов Кирилл Глебович
kirdan15@mail.ru

Новосибирск, 14 декабря 2020 г.

Самоподобные множества

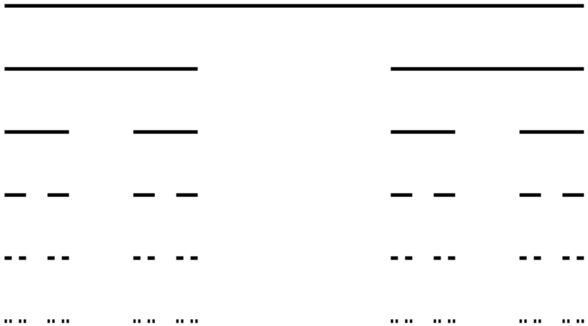
Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ — система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$. Непустое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ такое, что

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K),$$

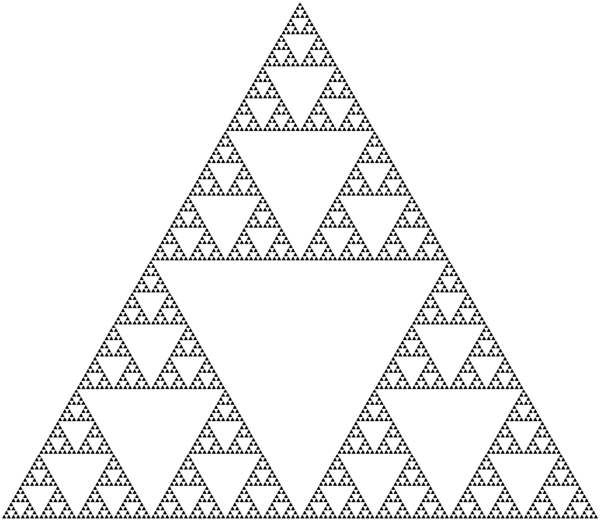
называется *самоподобным* множеством, порожденным системой $\mathcal{S}$, или *аттрактором* (*инвариантным* множеством)[1] системы $\mathcal{S}$.

[1] J. Hutchinson, "Fractals and Self Similarity", Indiana University Mathematics Journal 30 (1981)

Множество Кантора



Треугольник Серпинского



Пересечения копий самоподобных множеств

Пусть $\mathcal{S}_t = \{S_1^t, \dots, S_m^t\}$ — система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$ с аттрактором K_t, зависящая от параметра $t \in D$, где D — некоторое метрическое пространство.

Зафиксируем различные $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Насколько велики множества тех параметров $t \in D$, при которых:

(a) $S_i^t(K_t) \cap S_j^t(K_t) = \varnothing$;

(b) $|S_i^t(K_t) \cap S_j^t(K_t)| < \infty$;

(c) $S_i^t(K_t) \cap S_j^t(K_t) = S_i^t S_j^t(K_t)$?

Исключительные параметры

Пусть (A_t, B_t) — семейство пар множеств в $\mathbb{R}^n$, зависящих от параметра $t \in D$.

Исключительными параметрами для семейства (A_t, B_t) мы называем те $t \in D$, при которых

$$A_t \cap B_t \neq \varnothing.$$

Размерность пересечений

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$, а f_t — сдвиги, повороты или растяжения пространства $\mathbb{R}^n$, параметризованные t.

Какова $\dim_H (A \cap f_t(B))$?

Оценки давались в случаях:
Marstrand (1954) [2]: $A, B \subset \mathbb{R}^2$, B — прямая;
Mattilla (1984) [3]: $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — борелевские;
Falconer (2004) [4]: $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — суслинские.

---

[2] J. M. Marstrand, "Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions", Proc. Lond. Math. Soc. s3–4:1 (1954)

[3] P. Mattila, "Hausdorff dimension and capacities of intersections of sets in n-space", Acta Math. 152 (1984)

[4] K. J. Falconer, "Dimensions of intersections and distance sets for polyhedral norms", Real Anal. Exchange 30:2 (2004)

Однако, если преобразованиям f_t подвергается одно или несколько сжимающих подобий в системе $\mathcal{S}_t = \{S_1^t, \dots, S_m^t\}$, например $S_j^t = tG$, то для пересечения $S_i^t(K_t) \cap S_j^t(K_t)$ копий аттрактора K_t системы $\mathcal{S}_t$ ситуация усложняется.

Кроме того, даже если $\dim_H(S_i^t(K_t) \cap S_j^t(K_t)) = 0$, это не гарантирует того, что $S_i^t(K_t) \cap S_j^t(K_t) = \varnothing$, поэтому верхние оценки для $\dim_H(S_i^t(K_t) \cap S_j^t(K_t))$ ничего не говорят о множестве исключительных параметров

$$\Delta = \{t \in D : \; S_i(K_t) \cap S_j^t(K_t) \neq \varnothing\}.$$

Условия отделимости

Система $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ сжимающих отображений с аттрактором K удовлетворяет *строгому условию отделимости* (SSC), если $\quad S_i(K) \cap S_j(K) = \varnothing \quad$ для всех различных i, j.

Система $\mathcal{S}$ удовлетворяет *условию открытого множества* (OSC), если существует непустое открытое множество O такое, что:
1) $S_i(O) \subset O \quad$ для всех $i \in I = \{1, \ldots, m\}$;
2) $S_i(O) \cap S_j(O) = \varnothing \quad$ для всех различных $i, j \in I$.

Система $\mathcal{S}$ и имеет *слабое свойство отделимости* (WSP), если Id — изолированнная точка в семействе $\{S_{\mathbf{i}}^{-1} S_{\mathbf{j}} : \ \mathbf{i}, \mathbf{j}$ — несравнимые мультииндексы$\}$.

SSC $\Rightarrow$ OSC $\Rightarrow$ WSP.

OSC $\Rightarrow$ $d = \dim_H K$ является решением уравнения Морана[5]:

$$\sum_{k=1}^{m} (\mathrm{Lip\ S_i})^{\mathrm{d}} = 1,$$

называемым *размерностью подобия* $\dim_S \mathcal{S}$ системы $\mathcal{S}$.

OSC $\Leftrightarrow$ $H^d(K) > 0$.

[5] P. A. P. Moran, "Additive functions of intervals and Hausdorff measure", Proc. Cambridge Philos. Soc. 42 (1946)

Bandt, Rao (2007) [6] : если система $\mathcal{S}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^2$ со связным аттрактором K имеет только конечные пересечения копий, то она удовлетворяет OSC.

Так ли это для $\mathbb{R}^3$?

[6] C. Bandt, H. Rao, "Topology and separation of self-similar fractals in the plane", Nonlinearity 20 (2007)

Теорема об общем положении[7]

Теорема 1

Пусть $(D,\rho),(L_1,\sigma_1),(L_2,\sigma_2)$ *— метрические пространства,* L_1 *и* L_2 *— компакты. Пусть отображения* $\varphi_i : \ D\times L_i \to \mathbb{R}^n$, $i=1,2$ *непрерывны,* $\Phi(t,x_1,x_2)=\varphi_1(t,x_1)-\varphi_2(t,x_2)$, *и для них выполнены следующие условия:*

(a) $\|\varphi_i(t,x_1)-\varphi_i(t,x_2)\| \le C\,[\sigma_i(x_1,x_2)]^\alpha$
для некоторого $C>0$ *и всех* $x_1,x_2\in L_i$;

(b) $M\,[\rho(t',t)]^\beta \le \|\Phi(t',x_1,x_2)-\Phi(t,x_1,x_2)\|$
для некоторого $M>0$ *и всех* $x_1\in L_1, x_2\in L_2,\ t,t'\in D$.

Тогда множество $\Delta=\{t\in D|\ \ \varphi_1(t,L_1)\cap\varphi_2(t,L_2)\ne\varnothing\}$ *замкнуто, и:*

$$\dim_H \Delta \le \min\left\{\frac{\beta\dim_H L_1\times L_2}{\alpha},\ \dim_H D\right\}$$

[7] K. Kamalutdinov, A. Tetenov, “Twofold Cantor sets in $\mathbb{R}$”, Siberian Electr. Math. Rep. 15 (2018)

Из теоремы мы видим, что если произведение $L_1 \times L_2$ имеет достаточно малую размерность, а именно:

$$\frac{\beta \dim_H L_1 \times L_2}{\alpha} < \dim_H D,$$

то множества $\varphi(t, L_1)$ и $\psi(t, L_2)$ не пересекаются для почти всех $t \in D$.

Переносы и растяжения одного множества

Предложение 2

Пусть $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$\dim_H\{t \in \mathbb{R}^n : \ A \cap (B+t) \neq \varnothing\} \leq \min\{\dim_H A \times B, \ n\}.$$

Предложение 3

Пусть $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *and* $0 \notin \bar{B}$. *Тогда*

$$\dim_H\{t \in \mathbb{R} : \ A \cap tB \neq \varnothing\} \leq \min\{\dim_H A \times B, \ 1\}.$$

Переносы одной копии самоподобного множества

Теорема 4

Пусть $\mathcal{F}_t = \{F_1, \dots, F_{m-1}, F_m^t(x) = G(x) + t\}$ *- система сжимающих подобий в* $\mathbb{R}^n$ *с коэффициентами* $(p_1, \dots, p_m)$ *и аттрактором* K_t*, зависящая от параметра* $t \in \mathbb{R}^n$*.*

Пусть $p_1 + p_m + \max\{p_1, \dots, p_m\} < 1$*.*

Тогда множество $\Delta = \{t \in \mathbb{R}^n \colon F_1(K_t) \cap F_m^t(K_t) \neq \varnothing\}$ *удовлетворяет условию*

$$\dim_H \Delta \leq 2 \ \dim_S \mathcal{F}_0.$$

SSC при переносах копий

Следствие 5

Пусть $\mathcal{F}_\tau = \{F_1^\tau(x) = G_1(x) + t_1, \ldots, F_m^\tau(x) = G_m(x) + t_m\}$ *- система сжимающих подобий в* $\mathbb{R}^n$ *с коэффициентами* $(p_1, \ldots, p_m)$ *и аттрактором* K_τ*, зависящая от параметра* $\tau = (t_1, \ldots, t_m) \in (\mathbb{R}^n)^m$*.*

Пусть выполнены следующие условия:
(a) $\max\{p_1, \ldots, p_m\} < 1/3$;
(b) $\dim_S \mathcal{F}_0 < n/2$.

Тогда система $\mathcal{F}_\tau$ *удовлетворяет SSC для почти всех* τ*.*

Растяжения одной копии самоподобного множества

Теорема 6

Пусть $\mathcal{F}_t = \{F_1, \dots, F_{m-1}, F_m^t(x) = tG(x) + h\}$ *- система сжимающих подобий в* $\mathbb{R}^n$ *с коэффициентами* $(p_1, \dots, p_{m-1}, p_m(t))$ *и аттрактором* K_t*, зависящая от параметра* $t \in (a, b)$*, где* G *- изометрия в* $\mathbb{R}^n$*.*

Пусть $a, b, r, R > 0$*,* $a < b < 1$ *такие, что:*
(a) $r \leq \|G(x)\| \leq R$ *для всех* $x \in K_t$*,* $t \in (a, b)$*;*
(b) $(p_1 + b)/(1 - \max\{p_1, \dots, p_{m-1}, b\}) < r/R$*.*

Тогда множество $\Delta = \{t \in (a, b) \colon F_1(K_t) \cap F_m^t(K_t) \neq \varnothing\}$ *удовлетворяет условию*

$$\dim_H \Delta \leq 2 \sup_{t \in (a,b)} \dim_S \mathcal{F}_t.$$

SSC при изменении коэффициентов подобия

Следствие 7

Пусть
$\mathcal{F}_\tau = \{F_1^\tau(x) = t_1 G_1(x) + h_1, \ldots, F_m^\tau(x) = t_m G_m(x) + h_m\}$ - *система сжимающих подобий в* $\mathbb{R}^n$ *с аттрактором* K_τ, *зависящая от параметра* $\tau = (t_1, \ldots, t_m) \in (a, b)^m$, *где* G_i, $i \in I$ - *изометрии в* $\mathbb{R}^n$.

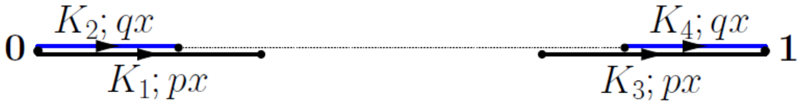
Пусть $a, b, r, R > 0$, $a < b < 1$ *такие, что:*
(a) $r \leq \|G_i(x)\| \leq R$ *для всех* $x \in K_\tau$, $\tau \in (a, b)^m$, $i \in I$;
(b) $2b/(1 - b) < r/R$;
(c) $(\ln(1/m))/\ln b < 1/2$.

Тогда система $\mathcal{F}_\tau$ *удовлетворяет SSC для почти всех* $\tau \in (a, b)^m$.

Сдвоенные канторовы множества[8]. Определение $\mathcal{S}_{pq}$ и K_{pq}

Пусть система $\mathcal{S}_{pq} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ сжимающих подобий в $[0,1]$ с аттрактором K_{pq}, зависящая от параметров $p, q \in (0,1)$ определена так:

$$S_1(x) = px, \qquad S_2(x) = qx,$$
$$S_3(x) = 1 - p + px, \qquad S_4(z) = 1 - q + qx.$$



[8] K. Kamalutdinov, A. Tetenov, "Twofold Cantor sets in $\mathbb{R}$", Siberian Electr. Math. Rep. 15 (2018)

Сдвоенные канторовы множества

Если система $\mathcal{S}_{pq}$ удовлетворяет условию

$$S_1^m(K_{pq}) \cap S_2^n(K_{pq}) = S_1^m S_2^n(K_{pq})$$

для всех $m, n \in \mathbb{N}$, мы называем K_{pq} *сдвоенным канторовым множеством*.

Теорема 8

Множество тех $(p, q) \in (0, 1/16)^2$, для которых K_{pq} — сдвоенное канторово множество, имеет полную меру в $(0, 1/16)^2$, а его дополнение несчетно и плотно в $(0, 1/16)^2$.

Свойства сдвоенных канторовых множеств

Теорема 9

Если K_{pq} *— сдвоенное канторово множество, то:*

(i) $\mathcal{S}_{pq}$ *не удовлетворяет* WSP;

(ii) $d = \dim_H K_{pq}$ *удовлетворяет уравнению*
$p^d + q^d - (pq)^d = 1/2$;

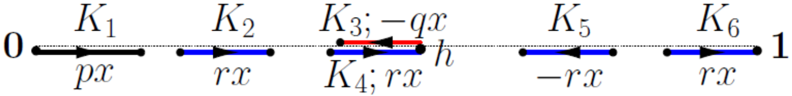
(iii) существует топологический предел
$\lim\limits_{t \to +\infty} tK_{pq} = [0, +\infty)$.

Пример с одноточечным пересечением в $\mathbb{R}$. Система $\mathcal{S}_{pqr}$

Пусть $p, q, r \in (0, 1/36)$, $h = \dfrac{8}{15}$, $a = \dfrac{3}{15}$. Мы определяем систему $\mathcal{S}_{pqr} = \{S_1, S_2, \ldots, S_6\}$ сжимающих подобий на $[0, 1]$ следующим образом:

$$S_1(x) = px,\ S_2(x) = a+rx,\ S_3(x) = h-qx,\ S_4(x) = h-r+rx,$$

$$S_5(x) = 1 - a - rx, \quad S_6(x) = 1 - r + rx.$$



Свойства системы $\mathcal{S}_{pqr}$

Предложение 10

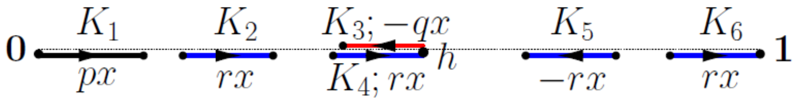
Система $\mathcal{S}_{pqr}$ и ее аттрактор K имеют следующие свойства:

(i) $S_1^m(K \setminus K_1) \cap S_1^n(K \setminus K_1) = S_6^m(K \setminus K_6) \cap S_6^n(K \setminus K_6) = \varnothing$ *для всех* $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$;

(ii) $S_i(K) \cap S_j(K) = \varnothing$ *для всех пар* $(i, j) \neq (3, 4)$, $i < j$;

(iii) $h \in S_3(K) \cap S_4(K)$;

(iv) $K = \{0\} \cup \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} S_1^m(K \setminus K_1) = \{1\} \cup \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} S_6^n(K \setminus K_6)$.



Единственное одноточечное пересечение

Предложение 11

Для системы $\mathcal{S}_{pqr}$ следующие условия эквивалентны:

(i) $S_3 S_1^m(K \setminus K_1) \cap S_4 S_6^n(K \setminus K_6) = \varnothing$ *для всех* $m, n \in \mathbb{N}$;

(ii) $K_3 \cap K_4 = \{h\}$.

Если система $\mathcal{S}_{pqr}$ удовлетворяет любому из условий (i)–(ii), мы говорим, что она имеет *единственное одноточечное пересечение*.

Единственное одноточечное пересечение

Предложение 12

Если $\dfrac{\log p}{\log r} \notin \mathbb{Q}$, *то система* $\mathcal{S}_{pqr}$ *не удовлетворяет WSP для любого* q.

Теорема 13

Если $\mathcal{S}_{pqr}$ *имеет единственное одноточечное пересечение, то* $\dim_H K_{pqr} = \dim_S \mathcal{S}_{pqr}$.

Теорема 14

Для любого $r \in (0, 1/36)$ *и* $p \in (0, r)$ *множество* $\mathcal{K}_{pr}$ *тех* $q \in (0, r)$, *при которых* $\mathcal{S}_{pqr}$ *имеет единственное одноточечное пересечение, имеет полную меру в* $(0, r)$.

Публикации автора

1. A. V. Tetenov, K. G. Kamalutdinov, D. A. Vaulin, "Self-Similar Jordan Arcs Which Do Not Satisfy OSC", arXiv:1512.00290 (2015).

2. K. G. Kamalutdinov, A. V. Tetenov, "Twofold Cantor sets in $\mathbb{R}$", Сибирские электронные математические известия, 15 (2018).

3. К. Г. Камалутдинов, "Самопересечения в параметризованных самоподобных множествах при сдвигах и растяжениях копий", Труды Института Математики и Механики УрО РАН, 25:2 (2019).

4. K. G. Kamalutdinov, A. V. Tetenov, "On one-point intersection property for self-similar fractals", Nonlinearity, 2020.