

F-полиномы и связанные суммы виртуальных узлов.

Максим Иванов

Новосибирский государственный университет

"Геометрия, топология и динамика", 13 декабря 2020 г.

Теория классических узлов: {Диаграммы узлов}/ {Движения Рейдемейстера}.

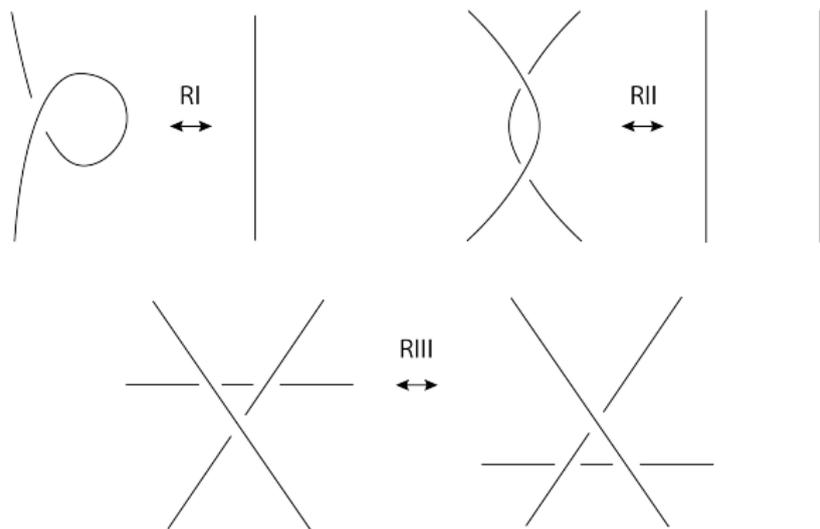


Рис.: Движения Рейдемейстера

Теория виртуальных узлов: {Диagramмы виртуальных узлов} /
{Обобщенные движения Рейдемейстера}

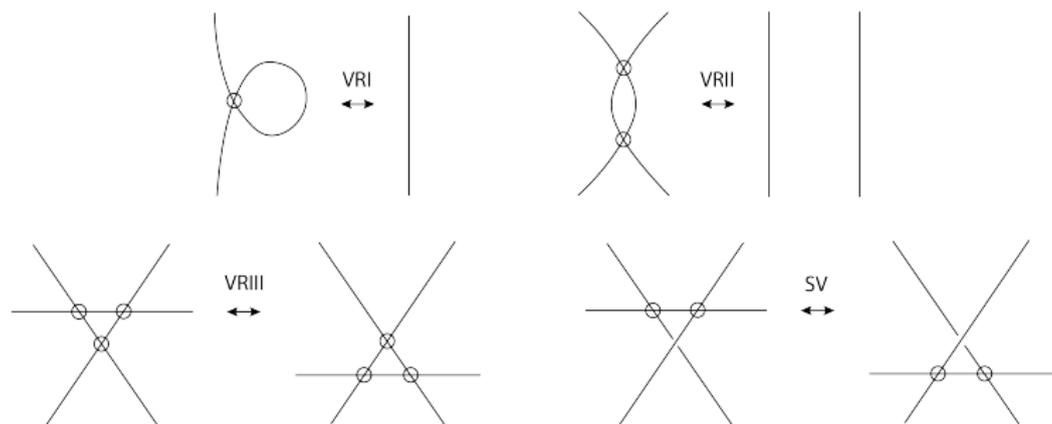


Рис.: Виртуальные движения Рейдемейстера

Теория плоских узлов: {Плоские диаграммы узлов} / {Плоские и виртуальные движения Рейдемейстера}.

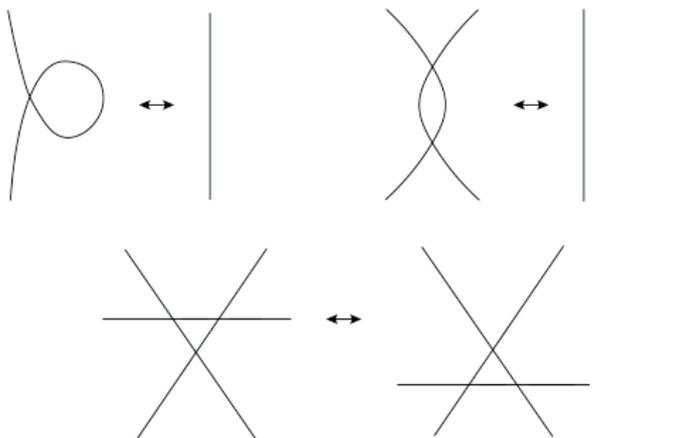
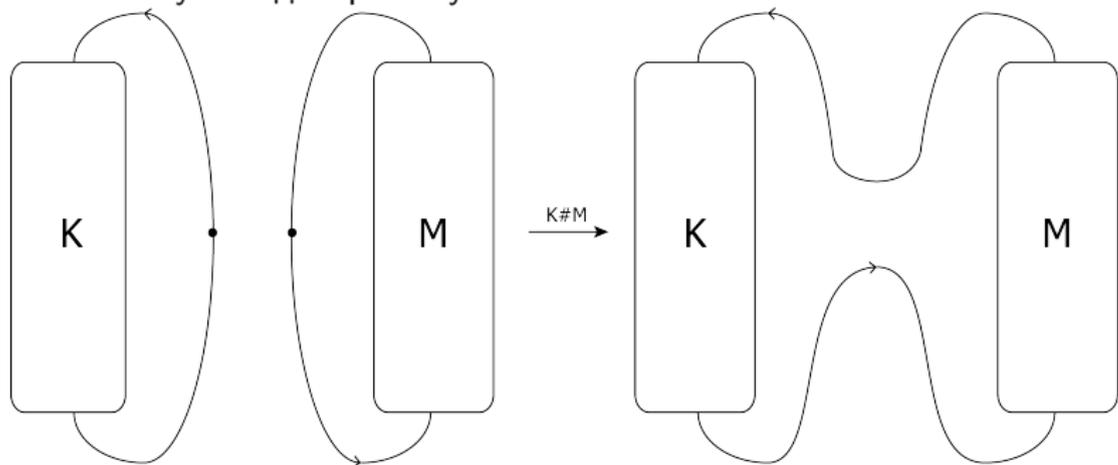


Рис.: Плоские движения Рейдемейстера

Связная сумма диаграмм узлов:



Связная сумма классических узлов:

- Связная сумма корректно определена.
- Связная сумма узла K и тривиального узла совпадает с K .

Связная сумма виртуальных узлов: Связная сумма диаграмм тривиальных узлов может быть нетривиальной.

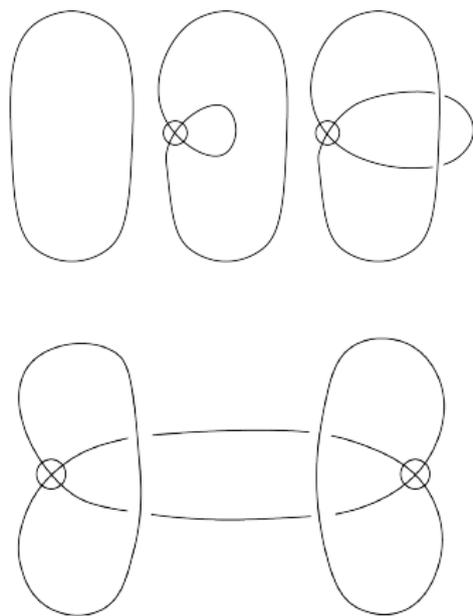


Рис.: Узел Кишино

Веса, сопоставляемые классическим перекресткам: $\text{sgn}(c)$, $\text{Ind}(c)$ и $\nabla J_n(D_c)$.

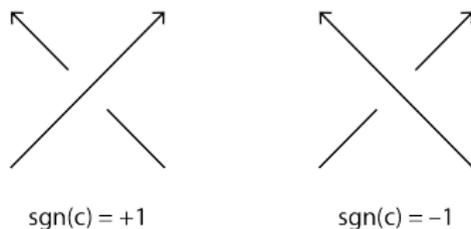


Рис.: Знак классического перекрестка

Присвоим каждой дуге в диаграмме D некоторое целое число согласно правилу определенному ниже.

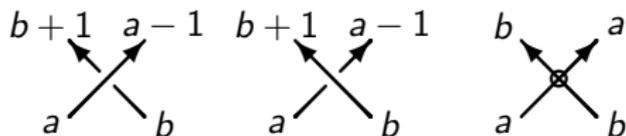


Рис.: Раскраска Ченга

Такая целочисленная раскраска всегда существует и называется раскраской Ченга. Для дуги α в диаграмме D соответствующее ей значение можно определить по формуле

$$\lambda(\alpha) = \sum_{c \in O(\alpha)} \text{sgn}(c)$$

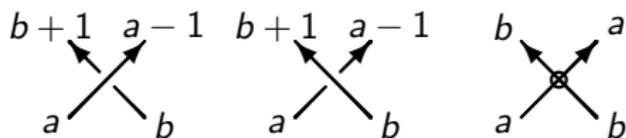
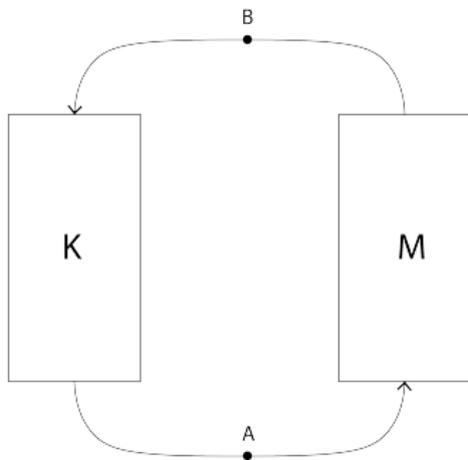


Рис.: Раскраска Ченга

Используя эту раскраску Ченг и Гао определили индекс классического перекрестка $\text{Ind}(c)$

$$\text{Ind}(c) = \text{sgn}(c)(a - b - 1)$$

Знаки и индексы сохраняются при связной сумме.



$$\lambda(\alpha'_K) = \lambda(\alpha_K) + \lambda(A)$$

$$\lambda(\alpha'_M) = \lambda(\alpha_M) + \lambda(B)$$

$$\text{Ind}(c') = \text{sgn}(c')((a + \lambda) - (b + \lambda) - 1) = \text{Ind}(c)$$

Аффинный индексный полином $P_K(t)$

$$P_K(t) = \sum_{c \in C(D)} \operatorname{sgn}(c)(t^{\operatorname{Ind}(c)} - 1)$$

Аффинный индексный полином не отличает различные связанные суммы

$$P_{K\#M}(t) = P_K(t) + P_M(t)$$

.

С. Сато и К. Танигучи определили инвариант виртуального узла - n -скрученность $J_n(D)$. Для каждого $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ n -скрученность ориентированного виртуального узла D определяется по формуле

$$J_n(D) = \sum_{\text{Ind}(c) = n} \text{sgn}(c)$$

К. Каур, М. Прабхакар и А. Веснин определили n -разностную скрученность $J_n(D)$

$$\nabla J_n(D) = J_n(D) - J_{-n}(D)$$

$\nabla J_n(D)$ - инвариант плоского ориентированного узла.

$$\nabla J_n(K \# M) = \nabla J_n(K) + \nabla J_n(M)$$

Для каждого классического перекрестка c рассмотрим диаграмму D_c , полученную сглаживанием согласно следующему правилу

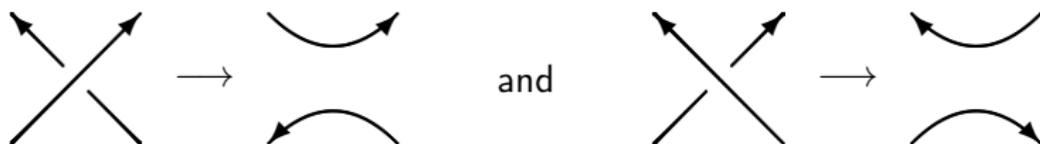


Рис.: Сглаживание против ориентации

Для плоских узлов $[D_c]$ соответствующих D_c выполнены следующие свойства:

- Для перекрестка c полученного при RI $[D_c] = [D^\pm]$.
- Для пары перекрестков c_1, c_2 , появившихся при RII $[D_{c_1}] = [D_{c_2}]$.
- $[D_c]$ у соответствующих перекрестков сохраняются при RIII и SV.
- $[D_c]$ не изменяется, если движение Рейдемейстера или смена перекрестка не затрагивают c .

Для ориентированной диаграммы D обозначим за D^- диаграмму с обращенной ориентацией, а c^- перекресток в D^- , соответствующий перекрестку c .

$$\text{sgn}(c^-) = \text{sgn}(c)$$

$$\text{Ind}(c^-) = -\text{Ind}(c)$$

Следовательно

$$\nabla J_n(D^-) = -\nabla J_n(D)$$

$$\nabla J_n((K \# M)_c) = \nabla J_n(K_c) \pm \nabla J_n(M)$$

К. Каур, М. Прабхакар и А. Веснин определили семейство полиномиальных инвариантов.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$F_K^n(t, \ell) = \sum_{c \in C(D)} \operatorname{sgn}(c) t^{\operatorname{Ind}(c)} \ell^{\nabla J_n(D_c)}$$

$$- \sum_{c \in T_n(D)} \operatorname{sgn}(c) \ell^{\nabla J_n(D_c)} - \sum_{c \notin T_n(D)} \operatorname{sgn}(c) \ell^{\nabla J_n(D)},$$

где $T_n(D) = \{c \in C(D) : |\nabla J_n(D_c)| = |\nabla J_n(D)|\}$

Предположим, что $\nabla J_n(K) = \nabla J_n(M) = 0$. Тогда

$$\nabla J_n((K \# M)_c) = \nabla J_n(K_c) \text{ если } c \text{ - перекресток в } K \text{ и}$$

$$\nabla J_n((K \# M)_c) = \nabla J_n(M_c) \text{ если } c \text{ - перекресток в } M$$

Следовательно

$$F_{K \# M}^n(t, \ell) = F_K^n(t, \ell) + F_M^n(t, \ell)$$

и $F_{K \# M}^n(t, \ell)$ не различает связанные суммы.

Табуляция виртуальных узлов (Jeremy Green)

Таблица содержит 117 узлов.

Из них индексный полином различает между собой 37 узлов.

Семейство F - полиномов различает между собой 65 узлов.

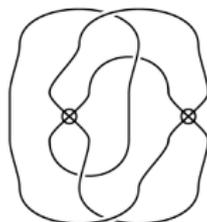


Рис.: $P_K = 0$, $F_K^2 = -\ell^2 t + t\ell^{-2}$

Узлы в утолщенном торе (А. Акимова, С. Матвеев, 2012)

Таблица содержит 90 различных узлов.

Семейство F -полиномов совпадают с аффинным индексным полиномом.

Узел K - вполне плоско-тривиальный, если существует плоско-тривиальная диаграмма узла K , такая, что все сглаживания плоско-тривиальны.

Если K - вполне плоско-тривиальный, то

$$F_k^n(t, \ell) = P_k(t) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}$$

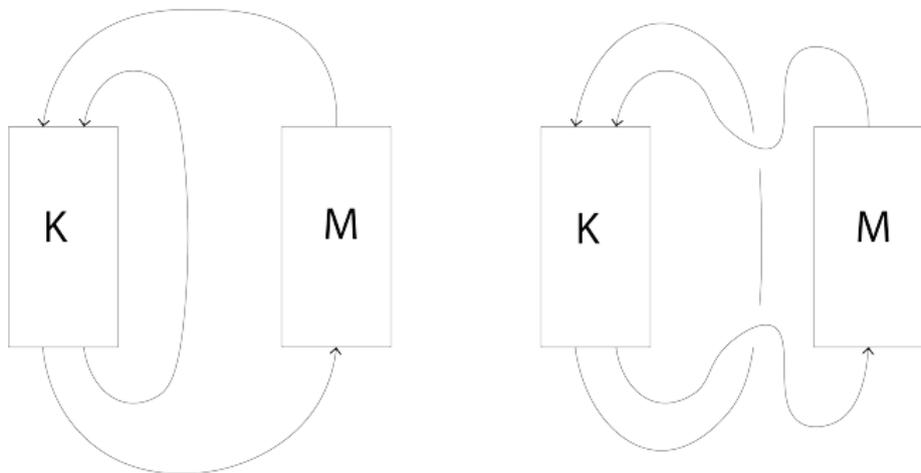
Все узлы из таблицы Акимовой - Матвеева вполне плоско-тривиальны.

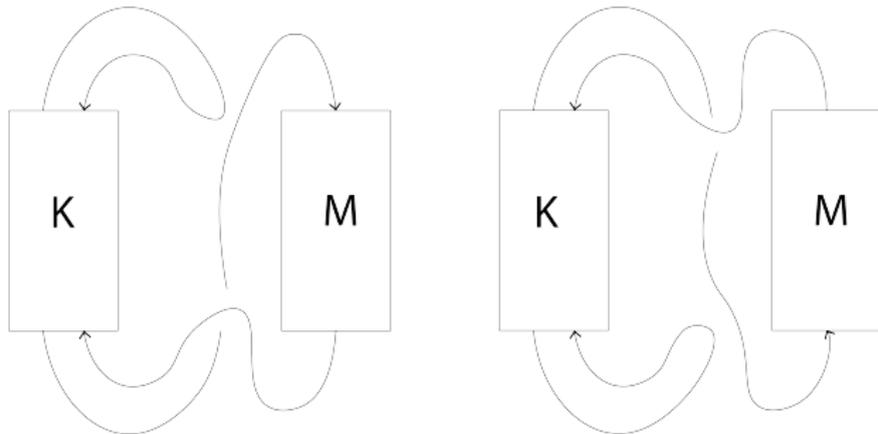
Теорема: Если $\nabla J_n(M) \neq 0$ и для всех перекрестков $c \in C(K_2) \setminus \{c_1, c_2\}$ с индексом $\text{Ind}(c) = \text{Ind}(c_1)$ выполняется

$$|\nabla J_n(K_{2_{c_1}})| \neq |\nabla J_n(K_{2_c})| \text{ и}$$

$$|\nabla J_n(K_{2_{c_1}})| \neq |\nabla J_n(K)|$$

то связанные суммы $K_1 \# M$ и $K_2 \# M$ различны.





Сглаживания индуцируют различные ориентации на M .

$$\nabla J_n((K_2 \# M)_{c_1}) = \nabla J_n(K_{c_1}) - \nabla J_n(M)$$

$$\nabla J_n((K_2 \# M)_{c_1}) = \nabla J_n(K_{c_1}) + \nabla J_n(M)$$

Теорема: Для любой пары узлов \mathcal{K} , \mathcal{M} таких, что $\nabla J_s(\mathcal{M}) \neq 0$ существует различное семейство связных сумм.

Доказательство Зафиксируем произвольную диаграмму K узла \mathcal{K} и рассмотрим последовательность диаграмм K_n .

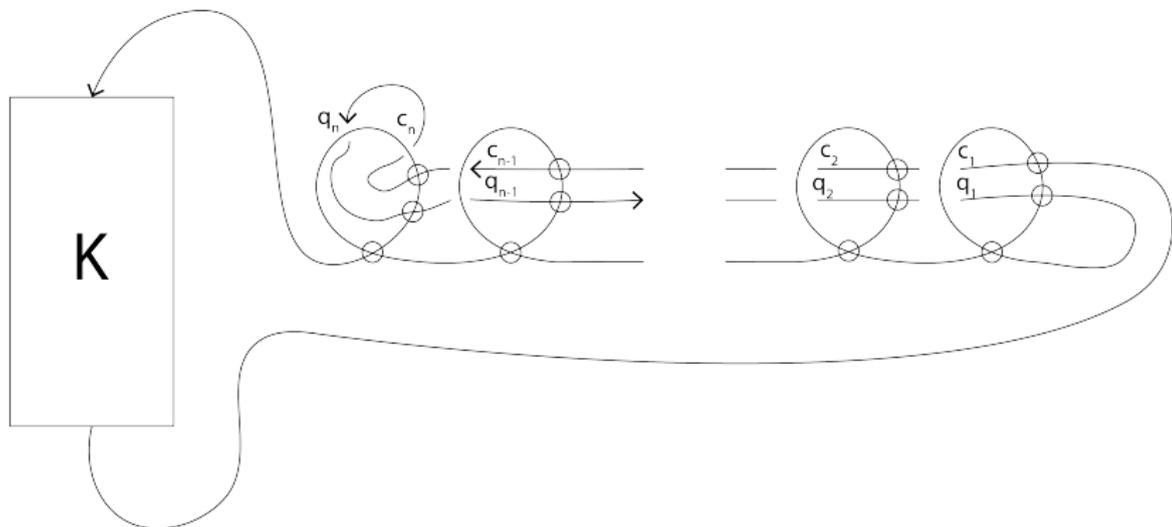


Рис.: Диаграмма K_n

Диаграмма K_n - это связная сумма диаграммы K и диаграммы тривиального узла с перекрестками c_i, q_i .

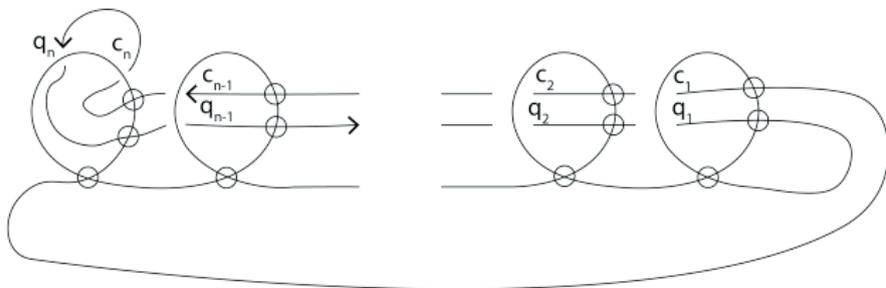


Рис.: Диаграмма K_n

$$\text{Ind}(q_i) = \text{Ind}(c_i)$$

$$\text{sgn}(c_i) = -\text{sgn}(q_i)$$

$$a = \text{sgn}(c_i) = 1$$

$$b = i - 1$$

$$\text{Ind}(c_i) = \text{sgn}(c_i)(a - b - 1) = -i + 1$$

Рассмотрим семейство связанных сумм $K_n \# M$

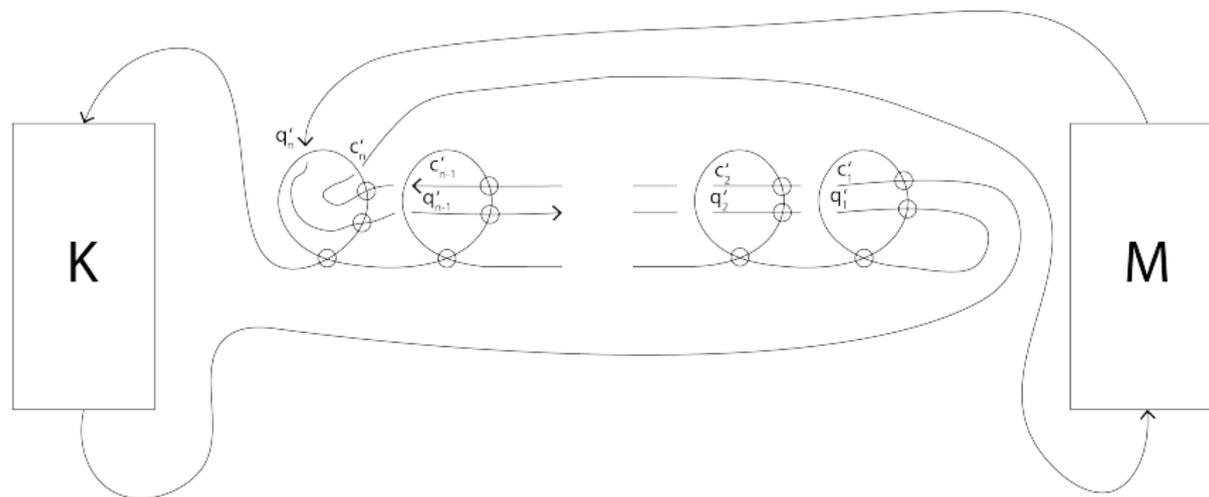


Рис.: Диаграмма $K_n \# M$

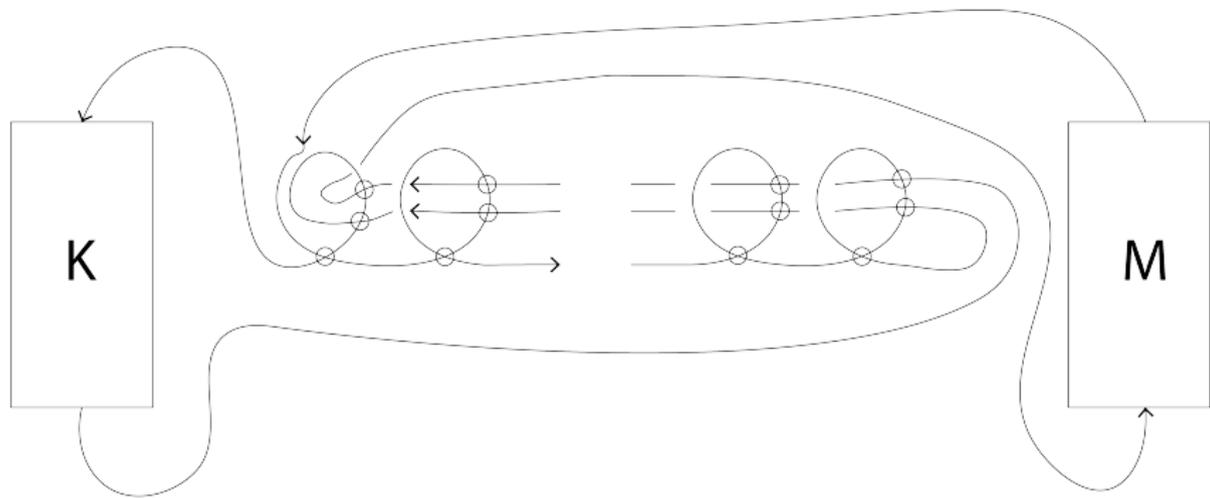


Рис.: Диаграмма $(K_n \# M)_{q_n}$

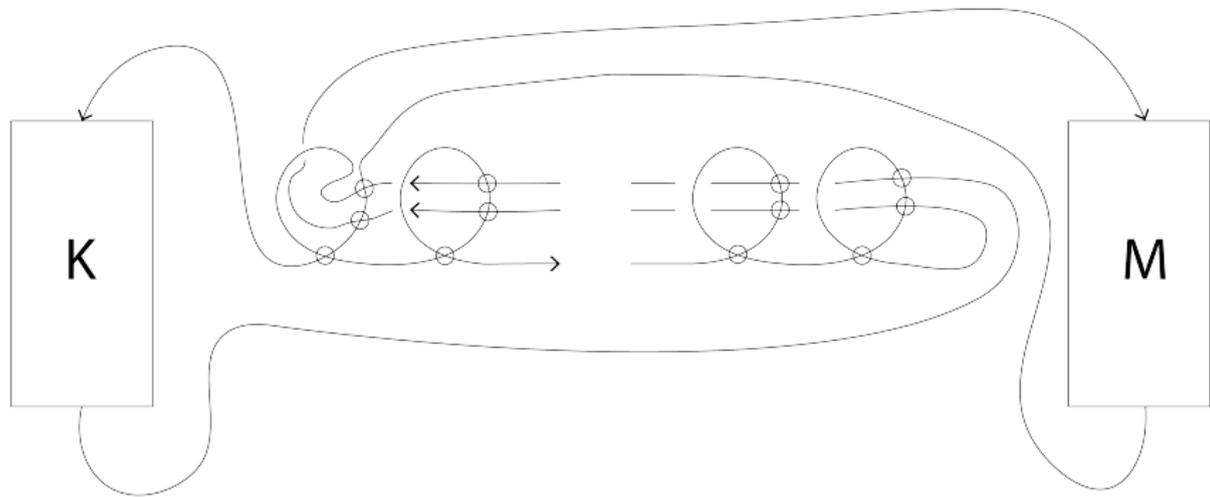


Рис.: Диаграмма $(K_n \# M)_{c_n}$

Так как $\nabla J_s(M) \neq 0$, слагаемые в $F_{K_n \# M}^s(t, \ell)$ соответствующие перекресткам c_n, q_n не сокращаются друг с другом. Выбрав достаточно большое n , мы можем добиться того, что они не будут сокращаться с перекрестками из K и M .

$$F_{K_l \# M}^s(t, \ell) \neq F_{K_k \# M}^s(t, \ell)$$

Теорема: Рассмотрим свободный $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ - модуль порожденный плоскими ориентированными узлами. Тогда $F(K)$

$$F(K) = \sum_{c \in C(D)} \text{sgn}(c) t^{\text{Ind}(c)} [K_c]$$
$$- \sum_{c \in T(D)} \text{sgn}(c) [K_c] - \sum_{c \notin T(D)} \text{sgn}(c) [K],$$

где $T(D) = \{c \in C(D) : [K_c] = [K^{\pm}]\}$

инвариант ориентированного виртуального узла.

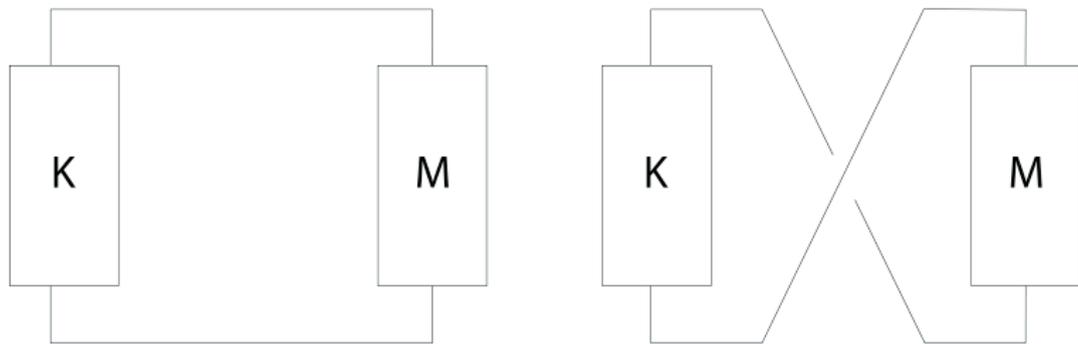


Рис.: Диаграммы $K \# M$ и $K' \# M$

Пример: Пусть $[K \# M] \neq [K' \# M]$. Тогда существует натуральное число n такое, что для любых $l > k > n$

$$K_l \# M \neq K_k \# M$$

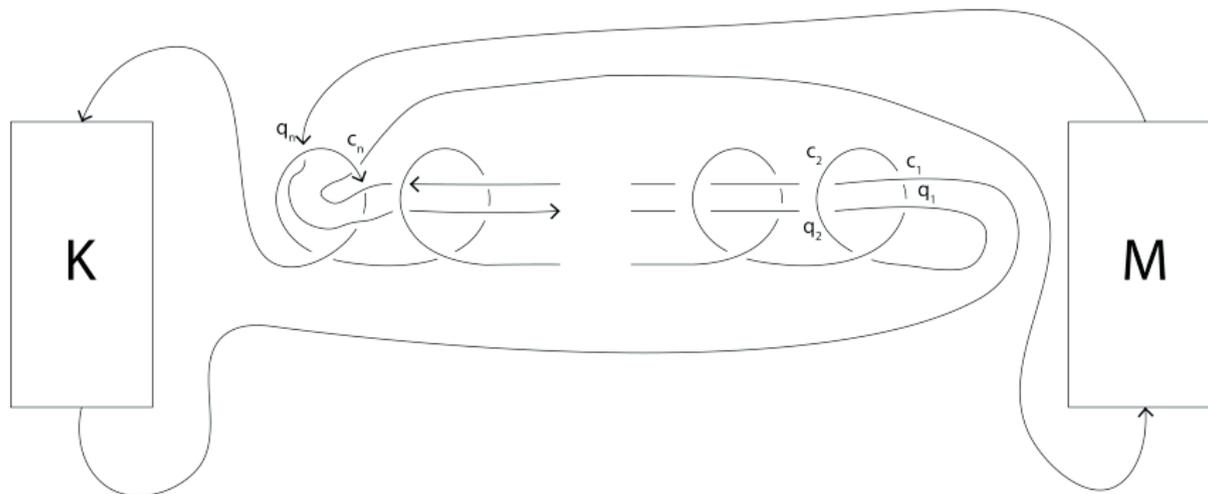
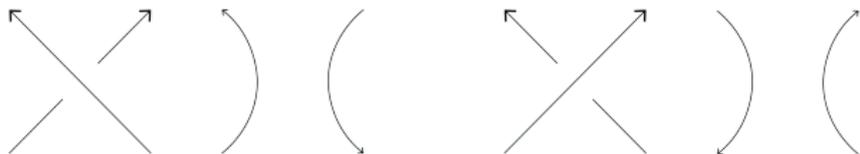


Рис.: Диаграмма $K_n \# M$

Для каждого классического перекрестка с рассмотрим диаграмму D^c , полученную сглаживанием согласно следующему правилу.



- Для перекрестка c полученного при RI $[D^c] = [D^\pm \sqcup O]$.
- Для пары перекрестков c_1, c_2 , появившихся при RII $[D^{c_1}] = [D^{c_2}]$.
- $[D^c]$ у соответствующих перекрестков сохраняются при RIII и SV.
- $[D^c]$ не изменяется, если движение Рейдемейстера или смена перекрестка не затрагивают c .

Теорема: Рассмотрим свободный $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ - модуль, порожденный всеми плоскими ориентированными 2-зацеплениями. Тогда $F'(K)$ определенный

$$F'(K) = \sum_{c \in C(D)} \text{sgn}(c) t^{\text{Ind}(c)} [K^c] \\ - \sum_{c \in T(D)} \text{sgn}(c) [K^c],$$

где $T(D) = \{c \in C(D) : [K^c] = [K^{\pm} \sqcup O]\}$

инвариант ориентированного виртуального узла.

Пример: Пусть $[K] \neq [O]$ и $[M] \neq [O]$. Тогда существует такое натуральное число n что для любых $l > k > n$

$$K_l \# M \neq K_k \# M$$

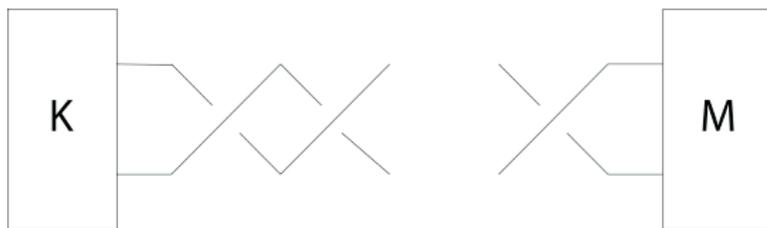
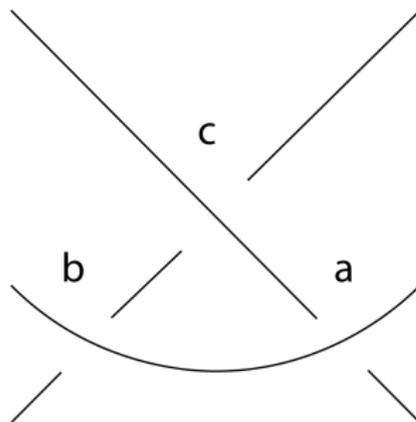
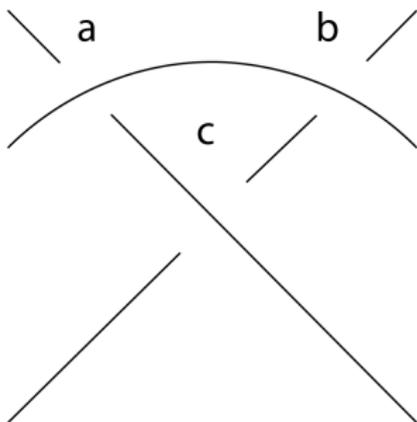


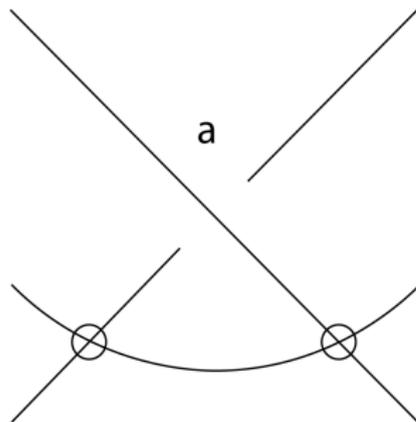
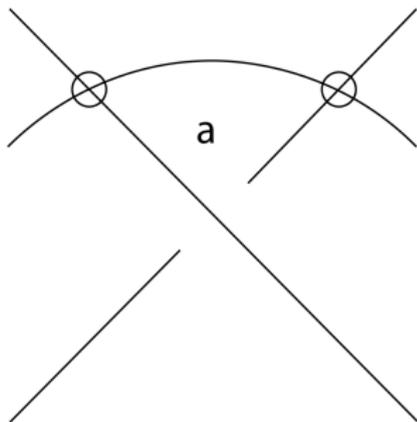
Рис.: Диаграмма $K_n \# M$

Новые перекрестки имеют одинаковый знак. Сглаживание в каждом перекрестке эквивалентно тривиально зацепленным K и M . Следовательно, новые перекрестки не принадлежат $T(D)$.

- W_G - веса со значениями в абелевой группе G , локальные и инвариантные относительно RIII, SV.

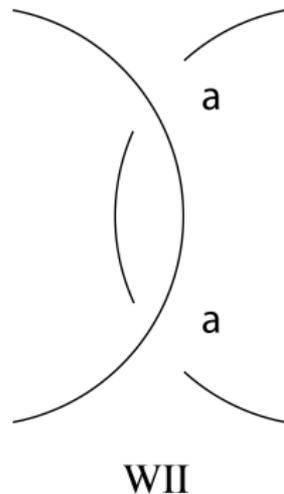
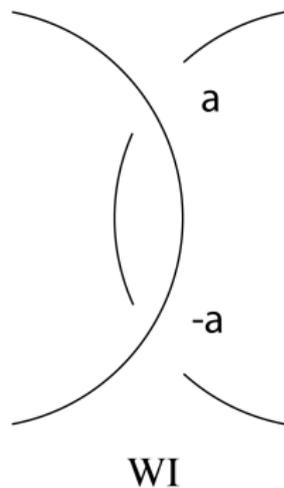


- W_G - веса со значениями в абелевой группе G , локальные и инвариантные относительно RIII, SV.



Два вида весов

- WI_G, WII_G - веса из W_G , такие, что для RII выполняются соотношения



Теорема: $w_1 \in WI_G$, $w_2 \in WII_G$, тогда для $a \notin T(w_2)$

$$W(w_1, w_2, K) = \sum_{w_2(c)=a} w_1(c) - \text{инвариант виртуального узла}$$

$W_f(w_1, w_2, K) = W(w_1, w_2, K) + W(w_1, w_2, K^*)$ - инвариант плоского узла

Теорема: Начиная с любых $w_1 \in WI_G$, $w_2 \in WII_G$, можно построить бесконечную последовательность весов и соответствующих инвариантов для виртуальных и плоских виртуальных узлов.

$$w_n(c) = W_f(v_{n-1}, w_2, K_c) \quad n > 2$$

v_{n-1} - вес из WI_G , зависящий от w_{n-1}

Теорема: Пусть $W_i(K) = W_f(v_{n-1}, w_2, K)$, тогда полином

$$F_D^{W_i}(t, \ell) = \sum_{C(D)} \operatorname{sgn}(c) t^{w_2} \ell^{w_i(c)} - \sum_{T(D)} \operatorname{sgn}(c) t^{w_2} \ell^{w_i(c)} - \\ - \sum_{C \setminus T(D)} \operatorname{sgn}(c) \ell^{W_i(D)}$$

является инвариантом виртуального узла.

Пусть $w_1(c) = \text{sgn}(c)$, $w_2 = \text{Ind}(c)$, тогда $w_3(c) = \nabla J_n(K_c)$.

$$F_K^{W_3}(t, \ell) = F_K^n(t, \ell)$$

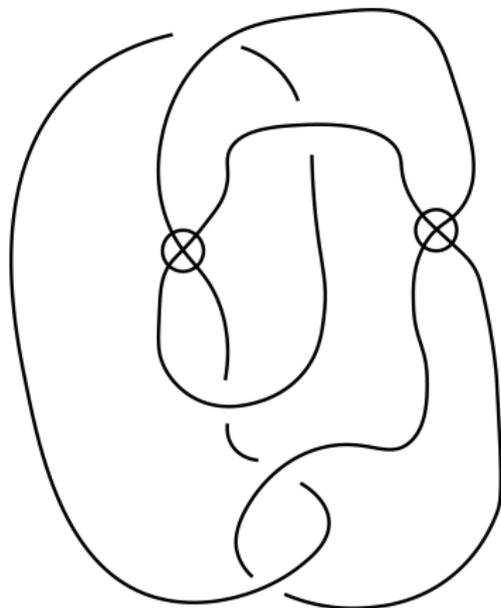
Пусть $w_1(c) = \text{sgn}(c)$, $w_2 = \text{Ind}(c)$, тогда $w_3(c) = \nabla J_n(K_c)$.

$$F_K^{W_3}(t, \ell) = F_K^n(t, \ell)$$

$$\begin{aligned} \nabla J_{n,m}(K) &:= W_f(\text{sgn}(c)\text{Ind}(c)\nabla J_n(K_c), \text{Ind}(c), K) = \\ &= m \sum_{\text{Ind}(c) = m} \text{sgn}(c)\nabla J_n(K_c) - m \sum_{\text{Ind}(c) = -m} \text{sgn}(c)\nabla J_n(K_c) \end{aligned}$$

$$w_4(c) = \nabla J_{n,m}(K_c)$$

Пример



$$F_K^n(t, \ell) = P_K(t) = 0$$

$$F_K^{W_4}(t, \ell) = -\ell^4 - \ell^{-4} + 2$$

Спасибо!